Jose Soto

Prepa 3

En esta preparaduria se iniciaran los conceptos sobre numeros complejos, sus distintas operaciónes y luego su manejo en calculadoras Hp 50g:

Lo primero que se debe definir cuando se habla de numeros complejos es la unidad compleja es decir la solución al problema:

$$x^2=-1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1}=\pm j$$

Siendo j la unidad compleja que cumple las siguientes reglas fundamentales:

$$j^2=-1$$
$$\frac{1}{j}=j^{-1}=-j$$
$$j^n=j^{n-4}$$

Un numero complejo se puede representar de tres formas:

$$\dot{Z}=a+j\cdot b \;\leftarrow\; rectangular$$
$$\dot{Z}=|\dot{Z}|\sphericalangle\psi_Z \;\leftarrow\; polar$$
$$\dot{Z}=|\dot{Z}|\cdot e^{j\cdot\psi_Z} \;\leftarrow\; exponencial$$

Siendo el valor absoluto de Z definido como la norma de Z de la siguiente forma:

$$|\dot{Z}|=Z=\sqrt{a^2+b^2}$$

Luego de esto, es importante definir un operador en los complejos que no existia en otros espacios, este operador se le llama conjugado y se denota con *:

$$si\;\; \dot{Z}=a+j\cdot b=Z\sphericalangle\psi_Z=Z\cdot e^{j\cdot\psi_Z} \;\rightarrow\; conj(\dot{Z})=\dot{Z}^*=a-j\cdot b=Z\sphericalangle-\psi_Z=Z\cdot e^{-j\cdot\psi_Z}$$

Con este operador es demostrable que:

$$|\dot{Z}|^2=\dot{Z}\cdot\dot{Z}^*$$

Ya con todo esto definido previamente se puede definir la suma de un numero complejo como la suma de las partes reales y las partes imaginarias independientemente:

$$\dot{Z}=a+j\cdot b$$
$$\dot{Y}=c+j\cdot d$$
$$\dot{X}=\dot{Z}+\dot{Y}=(a+c)+j\cdot(b+d)$$

Esto es semejante a la suma de vectores y por eso a la hora de sumar numeros complejos es mas comodo tenerlos en forma rectangular. En cuanto a la multiplicación se define de la forma usual:

$$\dot{Z}=a+j\cdot b$$
$$\dot{Y}=c+j\cdot d$$
$$\dot{X}=\dot{Z}\cdot\dot{Y}=(a+j\cdot b)\cdot(c+j\cdot d)=(a\cdot c+j^2\cdot b\cdot d)+j(a\cdot d+b\cdot c)=(a\cdot c-b\cdot d)+j(a\cdot d+b\cdot c)$$

En cuanto a la divicion:

$$\dot{Z}=a+j\cdot b$$
$$\dot{Y}=c+j\cdot d$$
$$\dot{X}=\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}=\frac{\dot{Z}\cdot\dot{Y}^*}{Y^2}=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)+j(-a\cdot d+b\cdot c)}{c^2+d^2}$$

Esta forma de definir la multiplicacion y divicion es poco practica en modo rectangular, su equivalente en polar es de la siguiente forma:

$\dot{Z}=Z\sphericalangle\psi_Z$

$\dot{Y}=Y\sphericalangle\psi_Y$

$\dot{X}=\dot{Z}\cdot\dot{Y}=Z\cdot Y\sphericalangle\psi_Z+\psi_Y$

$\dot{X}=\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}=\frac{Z}{Y}\sphericalangle\psi_Z-\psi_Y$

Como se ve, es mucho mas comoda la definicion en coordenadas polares (similarmente con las exponenciales).

<u>Problemas 1:</u>

Realise las siguiesntes operaciónes teniendo:

$\dot{X}=1+j\cdot 2 \quad \dot{Y}=3\sphericalangle 30° \quad \dot{Z}=5\cdot e^{-j\cdot\pi/3}$

- $\dot{X}+\dot{Y}+\dot{Z}$ En este primer caso dibuje en el plano complejo (Im vs Re)
- $\dot{X}\cdot\dot{Y}\cdot\dot{Z}^*$
- $\dot{Y}^2/X$

Deberia notar algo imporatante y es que, en los numeros complejos vistos como vectores, la suma se ve en el plano complejo como la suma de vectores en el plano cartesiano, cumpliendo la ley del paralelogramo por ejemplo. Mientras que la multiplicacion en numeros complejos, se puede ver como un reescalamiento en el modulo del multiplicador y una rotación en el angulo en sentido anti horario (en la division es completamente alrevez).

Ademas de esto, se ve que el manejo de los numeros complejos no lleva mucho esfuerzo y esto debe ser asi ya que los numeros complejos no son mas que solo eso, numeros. Entonces, mas que aprender a sacar cuantas rapido a mano con ellos, es importante saber utilizar herramientas de calculo para acelerar el trabajo.

Antes de nada se definiran dos operadores especiales en los numeros complejos:

$\dot{Z}=Z\sphericalangle\psi_Z=a+j\cdot b$

$\Re(\dot{Z})=Z\cdot\cos(\psi_Z)=a$

$\Im(\dot{Z})=Z\cdot sen(\psi_Z)=b$

Estos operadores son conocidos como la parte real y la parte imaginaria de un numero complejo, respectivamente.

Lo primero es, como escribir un numero complejo en la calculadora?

Bueno, esto se puede hacer de varias formas:

1. Escribiendo con shift – unos parentesis, en los cuales se coloca el numero de la forma (a,b).
2. Escribiendo numero de la forma $(a,\sphericalangle b)$ (para colocar el simbolo de angulo es ALPHA especial (rojo) 6, o entrando al menu de caracteres, en especial N).
3. Usando el caracter para el numero imaginario que se consigue en shift I.

Ninguna ofrma es mejor que otra, siempre depende de como se den los datos, lo unico que si es importante a tener en cuenta si la calculadora se encuentra en RADianes o en DEGrees (grados), indistintamente de si se esta en rectangular o polar la calculadora agarrara bien el numero, solo que en pantalla lo mostrara como lo tenga indicado internamente (para modificar entrar al menu MODE en la tecla H).

Ya con el numero en la calculadora, se puede cambiar de modo y esta cambiara automaticamente todos los valores, algo util por ejemplo en las sumas y multiplicaciones hechas anterior mente.

Ahora, la calculadora sabe sumar, restar, multiplicar, dividir y invertir sin tener que colocar ningun comando especial. En cuanto a las operaciónes especiales, para acceder a ellas se tiene el menu especial (rojo) 1 (CMPLX) en la cual se encuentran los siguientes operadores:

1. ARG: Saca el argumento (angulo) del numero complejo.
2. ABS: Saca el modulo del numero complejo.
3. CONJ: Saca el conjugado del numero complejo.
4. i: Es el operador imaginario.
5. IM: Calcula la parte imaginaria.
6. NEG: Calcula el negado (multiplica por -1).
7. RE: Calcula la parte real.
8. SIGN: Divide entre el modulo, dejando unicamente $(1, \sphericalangle b)$ (tenerlo encuenta, es mas ultil de lo que aparenta serlo).

Ahora en cuanto a la resolucion de ecuaciones, la calculadora es capas de resolver ecuaciones con numeros complejos al igual que con numeros reales, solo que es considerablemente mas lento, por lo que es mejor separarlo en parte compleja y parte real. Debe tomarse en cuenta que la calculadora solo sabe resolver ecuaciones estando en RADianes.

Ejemplo resuelva:

$$(10, X) = 5 \sphericalangle \psi + (2, 4)$$

Recuerde que las ecuaciones complejas, al tener parte imaginaria y real valen por dos, asi que de una ecuacion compleja se pueden conseguir 2 valores reales. Primero se reescribe para que la calculadora la entienda

$$(10, X) = 5 \cdot (\cos(\psi), \sin(\psi)) + (7, 4)$$

No casualmente se escojio como ejemplo uno de los casos en los que la calculadora no puede resolver. La calculadora es perfectamente capas de despejar una variable compleja entera, pero no es capas de despejar si no es la variable completa. Para resolver esto se debe separar en real e imaginaro como se sugirio antes:

$$\begin{matrix} 10 = 5 \cdot \cos(\psi) + 7 \\ X = 5 \cdot sen(\psi) + 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \psi = \pm 0{,}9279\, rad = \pm 53.1301\,° \\ X = 8 \quad y \quad X = 0 \end{matrix}$$

En algunas ecuaciones complejas se llega a dos resultados posibles. Para escojer un resoltado se debe ver el sentido fisico del problema como se vera en futuras preparadurias, en este caso como no se trata de ningun problema en particular se dejara hasta aqui.